جامعة تكريت
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الفيزياء الرياضية

المصفوفات

استاذ دكتورة عواطف صابر جاسم

١

الفصل الثاني

* المقدمة

تعرف المصفوفة بأنها مجموعة الاعداد المرتبة على شكل مستطيل كل عدد فيها يسمى عنصراً للتالي المصفوفة وتوصف كل مصفوفة ذات m من الصفوف و n من الاعمدة بأنها من الدرجة $m \times n$ ويرمز للمصفوفة بالاحرف الكبيرة مثلاً A ، B ، C اما عناصر المصفوفة فيرمز لها بالاحرف الصغيرة مثلاً a ، b ، c وللدلالة على المصفوفة تستعمل [ ] او ( ) وعليه يمكن كتابة المصفوفة العامة من الدرجة $m \times n$ بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث ان a_{ij} يرمز الى العنصر الموجود في تقاطع الصف i مع العمود j وان صفوف المصفوفة عددها m وهي

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{1n})$$

اما اعمدة المصفوفة فعددها n وهي

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال ذلك: تكتب المصفوفات الاتية تبعاً لعدد الصفوف والاعمدة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A من الدرجة 3×3 صفوفها هي

$$(1, 5, 2), (3, 7, 0), (4, 9, -6)$$

واعمدتها هي

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة B من الدرجة 3×1 وكذلك فان

$a_{11} = 4$ ، $a_{21} = 6$ ، $a_{31} = 8$ حيث a_{31} يشير الى العنصر الذي يقع في الصف الثالث والعمود الاول

مثال/ التفسير

$$\begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ x_1-x_2 & 2y_1-y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

يكافئ مجموعة المعادلات الآتية

$x_1 + x_2 = 1$ ---- ①

$x_1 - x_2 = 0$ ---- ② $\rightarrow x_1 = x_2$ ---- (a) أو $x_2 = x_1$

$y_1 + y_2 = 2$ ---- ③ $\rightarrow y_1 = 2 - y_2$ ---- (b)

$2y_1 - y_2 = 4$ ---- ④

بتعويض المعادلة (a) في المعادلة (1) لنجد قيمة x_1, x_2

$$x_1 + x_1 = 1 \Rightarrow 2x_1 = 1 \quad x_1 = \frac{1}{2}, \; x_2 = \frac{1}{2}$$

بتعويض المعادلة (b) في المعادلة (4) لنجد قيمة y_1, y_2

$$2(2-y_2) - y_2 = 4 \Rightarrow 4 - 2y_2 - y_2 = 4$$

$$-3y_2 = 4 - 4 \Rightarrow -3y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{0}{-3} = 0$$

نعوضها في (b) لنجد y_1

$$y_1 = 2 - 0 \Rightarrow y_1 = 2$$

2.2 جبر المصفوفات Matrix Algebra

أولاً- جمع وطرح المصفوفات

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ مصفوفتان لهما نفس الأبعاد فان مجموعهما او طرحهما $A \pm B$ يعرف بالمصفوفة $C = [c_{ij}]$ ولها نفس الأبعاد.

مثال/ إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد $B + A$ ، $B - A$

$$B + A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B - A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال اوجد مجموع المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 1+t \end{bmatrix} \; * \; B = \begin{bmatrix} 1+t & -2 \\ -3 & 1-t \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 1+t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+t & -2 \\ -3 & 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\cancel{t}+1+\cancel{t} & 2-2 \\ 3-3 & 1+\cancel{t}+1-\cancel{t} \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ثانياً - ضرب المصفوفات

اذا كانت المصفوفات $A = [a_{11} \; a_{12} \; \dots \; a_n]$ والتي درجتها $1 \times m$

والمصفوفه

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

والتي درجتها $m \times 1$ فان حاصل ضرب $A . B$ ينتج المصفوفات التي درجتها 1×1 الى ان

$$C = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1m} b_{m1}]$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots a_{1n}b_{m1}$$

مثال / اوجد حاصل ضرب المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل

نضرب عناصر الصف الاول في المصفوفة A في العناصر المناظرة بالعمود الاول من المصفوفة B ثم نجمع حاصل الضرب لنحصل

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

ونستمر لنحصل على

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0*1 + 1*0 & 0*0 + 1*-1 \\ 1*1 + 0*0 & 1*0 + 0*-1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0+0 & 0+(-1) \\ 1+0 & 0+0 \end{bmatrix} \therefore A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال / اوجد ناتج

$$(2 \quad 3 \quad 4) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [(2*1) + 3(-1) + 4*2] =$$

$$= [2 - 3 + 8] = 7$$

مثال / المطلوب تمثيل المعادلات الآتية بالمعادلة المصفوفية :-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = y_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = y_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = y_3$$

الحل / يمكن تمثيل المعادلات أعلاه بالشكل :-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

أو

$$AX = y$$

مثال / اوجد ناتج ما يأتي

$$5\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل / يوضح المثال ضرب ثابت في مصفوفة وتجري العمليات :-

$$\begin{bmatrix} 3\times 5 & 4\times 5 \\ 5\times 5 & 6\times 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\times -2 & -2\times -2 \\ 3\times -2 & 4\times -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\times 0 & 3\times 0 \\ 5\times 0 & 7\times 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\times k & 0\times k \\ 0\times k & 0\times k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15-2 & 20+4 \\ 25-6 & 30-8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 24 \\ 19 & 22 \end{bmatrix}$$

3.2 تعريفات Definitions

اولاً / المصفوفات المتساوية (Equal matrices)

يقال ان المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ متساويتان فيما اذا كانتا من درجة واحدة وكان كل عنصر من احدهما مساوياً للعناصر المقابلة من الثانية

مثال /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} , B \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

الان المصفوفتان A, B تسميان مصفوفتان متساويتان

ثانياً / المصفوفة المربعة (square Matrix)

تسمى المصفوفة التي صفوفها يساوي عدد اعمدتها بالمصفوفة المربعة

مثال / المصفوفة الاتية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ثالثاً / المصفوفة الصفرية (Zero matrix)

تسمى المصفوفة التي كل عناصرها (اصفاراً) بالمصفوفة الصفرية اي كل عناصر المصفوفة تساوي صفر (0)

مثال / المصفوفة الاتية من الدرجة $m \times n$ تسمى مصفوفة صفرية

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

رابعاً / المصفوفة القطرية (Diagonal matrix)

اذا كان عنصر من عناصر المصفوفة يساوي صفراً ماعدا الموجود في القطر تسمى المصفوفة بالمصفوفة القطرية ويرمز لها $diag\ [\quad]$

مثال / يسمى قطر الرئيسي

$$D = diag\,[a_1 \ \ a_2] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

مثال/

$$D = diagnal(1\ \ 2\ \ 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

خامساً/ مصفوفة الوحدة (Unit Matrix)

المصفوفة القطرية التي عناصر قطرها الواحد الصحيح تسمى مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز I_n

$$AI_n = A_nA = A$$

مثال/

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سادساً/ منقول المصفوفة (Transferred Matrix)

تسمى المصفوفة ذات الدرجة $n \times m$ الناتجة عن المبادلة بين الصفوف والأعمدة للمصفوفة A ذات الدرجة $m \times n$ بمنقول المصفوفة A ويرمز لها A^t كما موضح في ما يلي :-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots & a_{m2} \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال/

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & x \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^t \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ x & 0 \end{bmatrix}$$

سابعاً/ المصفوفة المتماثلة (Symmetric Matrix)

اذا حققت المصفوفة المربعة $A^t = A$ فيقال بانها مصفوفة متماثلة

مثال/ المصفوفة الاتية هي مصفوفة متماثلة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$