جامعة تكريت
كلية العلوم
قسم الفيزياء
الفيزياء الرياضية

محدد المصفوفة

استاذ دكتورة عواطف صابر جاسم

٢-٤ محدد المصفوفة (Matrix determant)

تعريف/ $A=(a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n \times n$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

تعريف
١- اذا كانت المصفوفة $A=(a_{ij})$ ذات الابعاد $n \times n$ فان $\det A = a_{11}$

مثال/ احسب محددة المصفوفة A حيث $A=(4)$

sol $\det A = |4| = 4$

٢- تعريف/ اذا كانت المصفوفة $A=(a_{ij})$ ذات الابعاد $n \times n$ وكانت $n=2$ فان

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال/ احسب محدد المصفوفتين A و B حيث ان

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} k-1 & k \\ k & k-1 \end{bmatrix}$$

sol

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 \times 2) - (5 \times 1) = 8 - 5 = 3$$

$$\det B = \begin{vmatrix} k-1 & k \\ k & k-1 \end{vmatrix} = k-1 * k-1 - k^2$$
$$= (k-1)^2 - k^2 = \cancel{k^2} - 2k + 1 - \cancel{k^2}$$
$$= 2k - 1$$

٣- تعريف / اذا كانت المصفوفة $A=(a_{ij})$ ذات الابعاد $n \times n$ فان المصفوفة الجزئية M_{ij} من المصفوفة A هي الناتجة من حذف الصف i والعمود j وتسمى محددة M_{ij} بالمحدد M_{ij}

مثال / اوجد المحددات M_{11} , M_{22} , M_{33} للمصفوفة الاتية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \det M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5 \times 9 - 6 \times 8 = 45 - 48 = -3$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \det M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 9 - (3 \times 7) = 9 - 21 = -12$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \det M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 4 = 5 - 8 = -3$$

٤- تعريف / اذا كانت المصفوفة $A=(a_{ij})$ ذات الابعاد $n \times n$ فان العامل المرافق لـ a_{ij} هو

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} \quad \text{--- (1)}$$

مثال / اوجد العامل المرافق A_{21} للمصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{21} = (-1)^{i+j} \det M_{21}$$

الصف الثاني

العمود الاول

$$= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -[2 \times 2 - 0 \times 0] = -4$$

مثال / اوجد العوامل المرافقة (Accompanying factors) لعناصر المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sol

$$A_{11} = (-1)^{i+j} \det M_{11} = (-1)^{1+1} \left| 1 \right| = +1$$

$$A_{21} = (-1)^{i+j} \det M_{21} = (-1)^{2+1} \left| 6 \right| = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{i+j} \det M_{22} = (-1)^{2+2} \left| 4 \right| = +4$$

$$A_{12} = (-1)^{i+j} \det M_{12} = (-1)^{1+2} \left| 2 \right| = -2$$

5- تعريف / اذا كانت المصفوفة $A = (a_{ij})$ ذات الابعاد وكانت $n \geq 2$ وكان i هو رقم الصف ثابتاً فان

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \quad \dots (2)$$

واذا كان j هو رقم العمود ثابتاً فان

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} \quad \dots (1)$$

H.W

مثال / اوجد العوامل المرافقة (Accompanying factors) لعناصر المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال/ اوجد محدد المصفوفة الاتية

find the determinant of the Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 17 \end{bmatrix}$$

Sol

$$\det A = \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 17 \end{bmatrix} \right|$$

باستعمال العلاقة (1) نحصل على

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 17 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 17 \end{vmatrix} + (-5) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(17+1) - 1(3 \times 17 - 1 \times 0) + -5(3 \times -1) - 1 \times 0)$$

$$= 2(18) - 51 - 5(-3)$$

$$36 - 51 + 15$$

$$= 0$$

تعريف / اذا كانت المصفوفة $A = (a_{ij})$ ذات الابعاد $n \times n$ فان المصفوفة $(A_{ij})^t$ تسمى مدور مصفوفة العوامل المرافقة (Adjoint Matrix) للمصفوفة A ونرمز لها adj A اي ان

$$(A_{ij})^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix} = \operatorname{adj} A$$

(١٢)

مثال/ اوجد منقول المصفوفة الاتية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل/ ان العوامل المرافقة لعناصر A السقه هي

$$A_{11} = (-1)^{1+1} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3\times7 - 4\times5 \Rightarrow 1$$

صف عامود

$$A_{21} = (-1)^{2+1} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -(2\times7 - 4\times1) \Rightarrow = -10$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = +7$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = +1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +2$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

فان منقول المصفوفة A هي

$$adj A = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

5 - 2

معكوس المصفوفة Inverse Matrics

اذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين بحيث ان

$$AB = I_n = BA$$ فان المصفوفة B يدعى معكوس المصفوفة وكانت

$$B = A^{-1}$$

مثال / اثبت ان معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{هو} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل / يجب ان يكون حاصل ضربهما مصفوفة الوحدة اي

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times-3 & 2\times-3+3\times2 \\ 3\times5+5\times-3 & 3\times-3+5\times2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10-9 & -6+6 \\ 15-15 & -9+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وسوف نستخدم الطريقة الاسهل لايجاد المعكوس للمصفوفة اذا كانت ع لا تساوي صفر $A \neq 0$ فان معكوس المصفوفة

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A)$$

مثال / احسب معكوس المصفوفة Inverse Matrise

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل نجد اولاً $\det A$

$$\det A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3\times3 - 2\times4 = 9-8 = 1$$

ونستخدم المعادلة (١) ونجد

$A_{11} = (-1)^{i+j} \det AA_{11} = (-1)^2 |3| = \boxed{3}$

$A_{12} = (-1)^{i+j} \det M_{12} = (-1)^{1+2} |4| = \boxed{4}$

$A_{21} = (-1)^{i+j} \det M_{21} = (-1)^{2+1} |2| = \boxed{-2}$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \det M_{22} (-1)^4 |3| = \boxed{3}$

ثم نستخدم (٤) لنجد

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{adj} A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال / اذا كانت

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

اثبت ان $AX = K$

الحل / نعوض عن المعادلة بـ A^{-1} لنحصل

$$Ax = k \Rightarrow A^{-1} A x = A^{-1} K$$

$$X = A^{-1} K$$

نحسب $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 * 3 - 2 \times 4 = 9 - 8 = 1$$

باستخدام المعادلة (١) نجد

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 |3| = +3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 |4| = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 |2| = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 |3| = +3$

ثم نستخدم المعادلة (٤) لنجد

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

تصبح قيمة X كالآتي

$$X = A^{-1} K = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 \\ -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

وللتحقق من ذلك نعوض على المعادلة $Ax = k$

$$Ax = K \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 \\ -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = K$$

مثال / اوجد معكوس المصفوفة الاتية

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

اولا نحسب قيمة $\det A$

$$\det A = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3(-2-1) - 0 + 1 + 0$

$= 3(-3 - (-1))$

$= -9 + 1 = 8$