2-5-2-1 الضرب الإتجاهي للمتجهات (Cross or Vector product of Vectors)

يُعرّف الضرب الإتجاهي كالتالي :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = |A||B|\sin\theta ...(13-1)}$$

حيث أن :-

$|A|$: مقدار المتجه $\vec{A}$.

$|B|$: مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ : الزاوية الصغرى بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أو إمتدادهما .

لإيجاد الضرب الإتجاهي $\vec{A}x\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نعوّض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})x(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = A_xB_x\hat{i}x\hat{i} + A_xB_y\hat{i}x\hat{j} + A_xB_z\hat{i}x\hat{k} + A_yB_x\hat{j}x\hat{i} + A_yB_y\hat{j}x\hat{j} + A_yB_z\hat{j}x\hat{k} + A_zB_x\hat{k}x\hat{i} + A_zB_y\hat{k}x\hat{j} + A_zB_z\hat{k}x\hat{k} ...(14-1)}$$

وبتطبيق تعريف الضرب التقاطعي (مع الإتجاه) على متجهات الوحدة الأساسية نجد أن :

$$\hat{i}x\hat{i} = \hat{j}x\hat{j} = \hat{k}x\hat{k} = 0$$

بينما

$$\hat{i}x\hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j}x\hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k}x\hat{i} = \hat{j}$$

و

$$\hat{i}x\hat{k} = -\hat{j} \quad \hat{k}x\hat{j} = -\hat{i} \quad \hat{j}x\hat{i} = -\hat{k}$$

وعليه فإن المعادلة (1- 14) تأخذ الصيغة التالية :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} ...(15-1)}$$

ملاحظة :- يتضح لنا بأنه في حالة الضرب الإتجاهي :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}}$$

مثال : إذا كان :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

إحسب كل من :-

1 - $2\vec{A} - 3\vec{B}$ ؟

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 2(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - 3(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} - 3\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\boxed{2\vec{A} - 3\vec{B} = \hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}}$$

2 - مقدار $\vec{A}$ ومقدار $\vec{B}$ ؟

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2}$$

$$\boxed{\therefore \left|\vec{A}\right| = \sqrt{14} units}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$$

$$\boxed{\therefore \left|\vec{B}\right| = 3 units}$$

3 - الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} \ldots(10-1)$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|A||B|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{(2)(1) + (3)(-2) + (1)(2)}{3\sqrt{14}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-2}{3\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\therefore \theta = 100.3^\circ}$$

4 - $\vec{A}x\vec{B}$ ؟

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} ...(15-1)$$

$$\vec{A}x\vec{B} = [(3)(2)-(1)(-2)]\hat{i} + [(1)(1)-(2)(2)]\hat{j} + [(2)(-2)-(3)(1)]\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = 8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}$$

5 - متجه الوحدة في الإتجاه $\vec{A}x\vec{B}$ ؟

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{\left|\vec{A}x\vec{B}\right|}$$

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(8)^2 + (-3)^2 + (-7)^2}}$$

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{122}}}$$

6 - متجه الوحدة في الإتجاه $\vec{B}x\vec{A}$ ؟

$$\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$$

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = -\hat{u}_{\vec{B}x\vec{A}}$$

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{B}x\vec{A}} = -\frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{122}}}$$

مثال :- إحسب قيمة (x) التي تجعل المتجهين التاليين متعامدين :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + x\hat{k}$$

$$\vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

الحل :-

بما أن المطلوب أن يكون المتجهان متعامدين فالزاوية بينهما تساوي ($90^\circ = \frac{\pi}{2}$) .

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta ...(9-1)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

$$(2)(-1) + (3)(-2) + 2x = 0$$

$$2x = 8$$

قيمة (x) التي تجعل المتجهين متعامدين $\boxed{\therefore x = 4}$

مسائل الفصل الأول
المتجهات (Vectors)
((1))

س1 : إذا كان :

$$\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} \quad و \quad \vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} \quad و \quad \vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$$

1- إحسب مقدار كل من المتجهات $\vec{A}$ () و ($\vec{B}$) و ($\vec{C}$) ؟

2- إحسب مقدار $3\vec{A} - 2\vec{B}$ ؟

الإجابة: $\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{77}units}$ $\boxed{|\vec{B}| = \sqrt{17}units}$ $\boxed{|\vec{C}| = \sqrt{29}units}$ $\boxed{3\vec{A} - 2\vec{B} = 11\hat{i} - 8\hat{j} - 24\hat{k}}$

س2 : إذا كانت مركبات المتجهين $\vec{A}$ () و ($\vec{B}$) هي :

$$A_x = 3 \ , A_y = 1.5 \quad B_x = 0.5 \ , B_y = 2$$

إحسب الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

الإجابة : $\boxed{\theta = 49.45^\circ}$

س3 : إذا كان :

$$\vec{B} = 9\hat{i} + 20\hat{j} + 12\hat{k} \quad و \quad \vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

1- ما هو متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{A}$) ؟

2- ما هو متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{B}$) ؟

الإجابة : $\boxed{\hat{u}_{\vec{A}} = 0.6\hat{i} - 0.3\hat{j} + 0.6\hat{k}}$ $\boxed{\hat{u}_{\vec{B}} = 0.36\hat{i} - 0.8\hat{j} + 0.48\hat{k}}$

س4 : إذا كان :

$$\vec{B} = 4\hat{i} + x\hat{j} \quad و \quad \vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j}$$

أوجد قيمة (x) والتي تجعل المتجهين متعامدين مع بعضهما البعض ؟

الإجابة : $\boxed{x = 8}$

س5 : إذا كان :

$$\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} \quad و \quad \vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

إحسب المتجه ($\vec{C}$) بحيث أن $\vec{A} - \vec{B} + C = 0$ ؟

الإجابة : $\boxed{\vec{C} = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}}$
