الفصل الخامس

الحركة الإهتزازية (Oscillatory Motion)

5- 1 المقدمة

تعرّف الحركة الإهتزازية بأنها حركة على مسار معين ثابت تتكرّر بعد زمن ثابت ، فالكون الذي نحن جزء منه يزخر بظواهر إهتزازية كثيرة ومثال على ذلك حركة جسم معلّق بنابض ، وحركة البندول البسيط (Simple Pendulum) ، وحركة وتر مهتز مربوط من طرفيه وإلى آخره .

إن المادة الصلبة أو السائلة تتكوّن من ذرات أو جزيئات تهتز في أماكنها كما أن كثيرا من الظواهر المقترنة بحركة نوى الذرات أو الإلكترونات تُوصف بحركات إهتزازية .

إن الأشعة الكهرومغناطيسية تُوصف أيضا بمجال كهربائي وآخر مغناطيسي تتغيّر شدتهما على شكل حركة إهتزازية ، وبالإضافة إلى ذلك فهنالك العديد من الظواهر التي تُوصف بحركات إهتزازية أيضا كالأمواج وحركة الأمواج الصوتية ، لهذا أصبح فهم هذه الحركة ذا أهمية كبرى في علم الفيزياء .

2-5 الخواص العامة للحركة التوافقية البسيطة

(General Properties of Simple Harmonic Motion)

إن الحركة التوافقية البسيطة هي شكل من أشكال الحركة الإهتزازية ولوصف أي شكل من أشكال هذه الحركة فإن النتيجة المطلوبة هي معرفة موقع الجسم مع الزمن وهذه الدالة نجدها بعد معرفة تسارع الجسم الذي يُستنتج من معرفة القوى الخارجية التي تؤثر على الجسم المهتز .

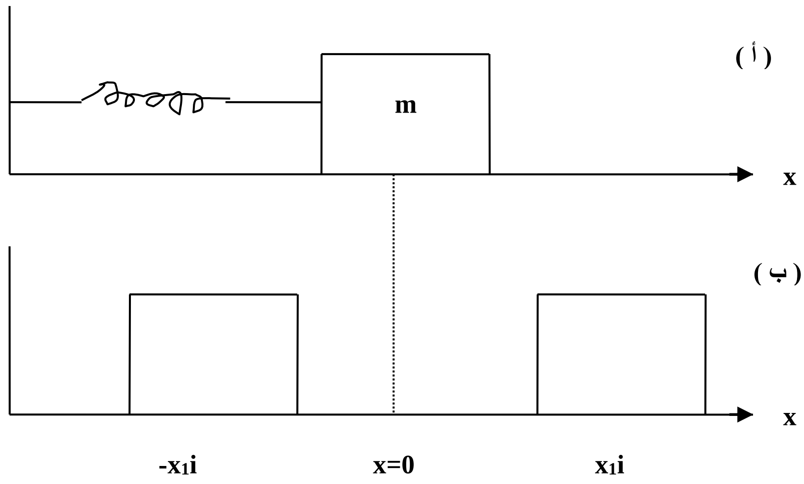
تحتوي معادلة الحركة ثلاثة ثوابت دائما ، **أولها** موقع الجسم ، **وثانيها** سرعته وهذان الثابتان يأخذان عند الزمن ($t = 0$) ويُسميان بالشروط البدائية للحركة ، والثابت **الثالث** يعتمد على طبيعة الجسم المهتز (كتلته أو عزم القصور الذاتي له أحيانا) والقوى الخارجية المؤثرة عليه .

3-5 معادلة الموقع (Equation of Position)

تتميّز الحركة التوافقية البسيطة بأنها تُعطى بدالة موضّحة في المعادلة (5 – 1) :

$$\boxed{x = A\cos(wt+\phi)\hat{i} \ldots (1-5)}$$

ولفهم الكميات الفيزيائية الواردة في المعادلة (5 – 1) نبدأ بوصف حركة جسم كتلته (m) يتحرّك على سطح أفقي أملس تحت تأثير قوة نابض ثابتة (k) مربوط بالجسم كما هو موضّح بالشكل (5- 1) :



شكل (5-1) : جسم كتلته (m) يتحرّك على سطح أفقي أملس تحت تأثير قوة نابض ثابتة (k)

الشكل (5- 1 أ) يمثل النابض عند طوله الطبيعي ، أما الشكل (5– 1 ب) فيمثل المحور الهندسي السيني (x) اللازم لتعريف موقع الجسم أثناء حركته ويشير إلى أقصى مسافة يتحرّكها الجسم على محور السينات ($x-axis$) ومعرّفة بالموقعين ($+x_1\hat{i}$) و ($-x_1\hat{i}$) .

إن حركة الجسم على السطح هي حركة إهتزازية لأن الجسم يتحرّك على خط مستقيم بين نقطتين حيث تتكرّر هذه الحركة بعد زمن ثابت ، أما الكميات الفيزيائية التي تظهر في هذه المعادلة فتعرّف كالتالي :

أولا : **زمن الذبذبة والتردد والتردد الزاوي للإهتزاز**

(Period , Frequency , and Angular Frequency of Oscillation)

ترتبط هذه الكميات الفيزيائية الثلاثة ببعضها بعلاقات رياضية ولا بدّ من تعريف كل منها وبيان علاقته مع الآخر، **فزمن الذبذبة** الذي يرمز له بالرمز (T) ووحدته هي (الثانية (s)) ، فيعرّف بأنه الزمن اللازم حتى يتحرّك الجسم من نقطة معينة وبإتجاه معين ثم يعود ثانية إلى نفس النقطة ويتحرّك بنفس الإتجاه السابق .

أما **التردد** الذي يرمز له بالرمز (f) ووحدته هي (معكوس الثانية (s^{-1})) الذي يطلق عليها إسم (هيرتز ($Hertz$)) وتختصر (Hz) ، فيعرّف بأنه عدد الذبذبات التي يعملها الجسم في الثانية الواحدة .

العلاقة ما بين زمن الذبذبة (T) والتردد (f) موضحّة في المعادلة الآتية :

$$\boxed{T = \frac{1}{f} ...(2-5)}$$

عندما ينجز الجسم ذبذبة كاملة فهذا يكافئ زمنا مقداره ($t = 2\pi / w$) وهذا الزمن مساوي لزمن الذبذبة الواحدة لأن الجسم يكون قد عاد إلى موقعه الإبتدائي بعد إنتهاء هذه الفترة الزمنية وللتحقّق من صحة هذا القول نعوّض في المعادلة (5 – 1) عند الزمن ($t = 0$) و ($t = 2\pi / w$) حيث يلاحظ أن موقع الجسم عند هذين الزمنين يكون :

$$x(t=0) = A\cos\phi\hat{i}$$

$$x(t=2\pi/w) = A\cos(w.\frac{2\pi}{w}+\phi)\hat{i}$$

$$x(t=2\pi/w) = A\cos\phi\hat{i}$$

إذن يعود الجسم إلى موقعه بعد زمن ($2\pi/w$) وهذا الزمن هو زمن الذبذبة الواحدة ، ومما تقدّم يتبيّن لنا أن العلاقة ما بين (T) و (f) و (w) تعطى بالمعادلة الآتية :

$$\boxed{w = 2\pi f = \frac{1}{T} ...(3-5)}$$

حيث يسمى (w) **بالتردد الزاوي** ويعرّف من خلال المعادلة (5- 3) ويعتمد على الجسم المتحرّك وطبيعة القوى التي تحدث هذه الحركة .

ثانيا : سعة الذبذبة (Amplitude of Oscillation)

وهي أقصى مسافة يتحرّكها الجسم من نقطة إتزانه (Equilibrium Point) وهي النقطة ($x = 0$) في الشكل (5 – 1) ، وتعرّف نقطة الإتزان بأنها النقطة التي يكون عندها مجموع القوى الخارجية المؤثرة على الجسم مساويا صفرا .

ويرمز لسعة الذبذبة بالرمز (A) وهي قيمة موجبة دائما لأنها تساوي طول متجه الموقع عند أقصى نقطة يصل إليها الجسم على المحور (x) وعليه فإن ($A = x_1$) في الشكل (5 – 1) ووحدتها هي المتر (m) .

ثالثا : ثابت الطور (Phase Constant)

يرمز لثابت الطور بالرمز (ϕ) في المعادلة (5 – 1) ، وتسمى الزاوية ($wt + \phi$) زاوية الطور (Phase Angle) وتحدّد قيمة ثابت الطور من موقع وسرعة الجسم عند بدء الحركة نسبة إلى محور القياس ، فقيمة الثابت (ϕ) تتغيّر إذا تغيّر إتجاه محور القياس لأن موقع وسرعة الجسم هي كميات متجهة تعتمد إشارتها على إتجاه محور القياس .

إن تعريف ثابت الطور (ϕ) وقيمته ، وكذلك قيمة سعة الذبذبة (A) فيمكن إيجادهما من قيمة موقع وسرعة الجسم عند بدء الحركة التي نفرضها بالتالي :

$$x(t=0) = x_i$$

$$v(t=0) = v_i$$

يجب أن نتذكّر دائما أن موقع الجسم وسرعته هما كميتان متجهتان لذا لا بدّ من معرفة إتجاههما بالنسبة للمحاور المفترضة قبل إجراء الحسابات ، كما أن قيمة الزاوية (ϕ) موجبة تنحصر بين (0 و 360 درجة) ، لاحظ أن ($-\phi = 360 - \phi$) .

بما أن سرعة الجسم هي :

$$v = dx/dt$$

إذن :

$$\boxed{v = -Aw\sin(wt+\phi)i...(4-5)}$$

نعوّض قيم $x(t=0) = x_i$ و $v(t=0) = v_i$ في المعادلتين (5 – 1) و (5 – 4) فينتج :

$$x_i = A\cos\phi\hat{i}$$

$$v_i = -Aw\sin\phi\hat{i}$$

إن المعادلتين الأخيرتين تمكننا من إيجاد قيمة الثابتين (A) و (ϕ) وهما قيمتان موجبتان دائما .

4-5 معادلات الحركة (Equations of Motion)

إن معادلات الحركة هي :

أولا : **موقع الجسم** :

$$\boxed{x = A\cos(wt+\phi)\hat{i}...(1-5)}$$

ثانيا : **سرعة الجسم** :

$$\boxed{v = -Aw\sin(wt+\phi)\hat{i}...(4-5)}$$

نلاحظ أن السرعة تصل لقيمتها العظمى عندما يكون :

$$\sin(wt+\phi) = \pm 1$$

وعند هذه القيمة تكون السرعة العظمى (v_m) تساوي :

$$\boxed{v_m = \pm Aw\hat{i}...(5-5)}$$

ثالثا : **تسارع (تعجيل الجسم)** :

يمكن إستنتاجه بإجراء عملية التفاضل للسرعة المعطاة في المعادلة (5 – 4) فينتج :

$$a = dv/dt$$

أي أن :

$$\boxed{a = -A.w^2.\cos(wt+\phi)i...(a6-5)}$$

أما القيمة العظمى للتسارع فتكون عندما تصبح قيمة :

$$\cos(wt+\phi)=\pm 1$$

وعند هذه القيمة تكون القيمة العظمى للتسارع (التعجيل) (a_m) تساوي :

$$\boxed{a_m=\pm A.w^2 i ...(7-5)}$$

مثال : جسم يتحرّك حركة توافقية بسيطة ، ومعادلة حركته هي :

$$x=0.1.\cos(\pi/3t-\pi/4)\hat{i}$$

أوجد ما يلي :

1- سعة الذبذبة ؟

2- زمن الذبذبة ؟

3- التردد ؟

4- ثابت الطور ؟

5- موقع الجسم وسرعته عند بداية الحركة ($t=0$) ؟

6- موقع الجسم وسرعته وتسارعه بعد 3 ثواني من إبتداء الحركة ؟

7- القيمة العظمى للسرعة والتسارع (التعجيل) ؟

الحل :

إن الشكل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة هو :

$$x=A\cos(wt+\phi)\hat{i}...(1-5)$$

بمقارنة معادلة الحركة مع المعادلة أعلاه ينتج :

1 - سعة الذبذبة (A) :

$$\boxed{A=0.1m}$$

2 - زمن الذبذبة (T) :

$$T=\frac{2\pi}{w}$$

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}\boxed{\Rightarrow T=6s}$$

3 - التردد (f) :

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{6} Hz}$$

4 - ثابت الطور (ϕ) :

يجب ملاحظة أن زاوية الطور هي قيمة موجبة دائما ، بما أن :

$$x = (0.1).\cos(\pi / 3t - \pi / 4)\hat{i}$$

$$x = (0.1).\cos(\pi / 3t - \pi / 4 + 2\pi)\hat{i}$$

$$x = (0.1).\cos(\pi / 3t + 7\pi / 4)\hat{i}$$

إذن :

$$\boxed{\phi = 7\pi / 4}$$

5 - موقع الجسم وسرعته عند بداية الحركة (t = 0) :

موقع الجسم :

$$x = A\cos(wt + \phi)\hat{i} ...(1-5)$$

$$x_{(t=0)} = (0.1).\cos(-\pi / 4)i$$

$$\Rightarrow x_{(t=0)} = 0.1\sqrt{2}\hat{i}$$

$$\boxed{\therefore x_{(t=0)} = 0.14\hat{i}m}$$

سرعة الجسم :

$$v = -Aw\sin(wt + \phi)\hat{i} ...(4-5)$$

$$v_{(t=0)} = -0.1\frac{\pi}{3}\sin - \frac{\pi}{4}\hat{i}$$

$$\Rightarrow v_{(t=0)} = \frac{0.1}{3}\pi\sqrt{2}\hat{i}$$

$$\boxed{\therefore v_{(t=0)} = 0.149\hat{i}m.s^{-1}}$$

6 - موقع الجسم وسرعته وتسارعه بعد 3 ثواني من إبتداء الحركة :

موقع الجسم :

$$x = A\cos(wt+\phi)\hat{i}...(1-5)$$

$$x_{(t=3\sec)} = 0.1\cos(\frac{\pi}{3}.3-\frac{\pi}{4})\hat{i}$$

$$\Rightarrow x_{(t=3\sec)} = -\frac{0.1}{\sqrt{2}}\hat{i} \quad \boxed{\therefore x_{(t=3\sec)} = -0.070\hat{i}\,m}$$

سرعة الجسم :

$$v = -Aw\sin(wt+\phi)\hat{i}...(4-5)$$

$$v_{(t=3\sec)} = -0.1\frac{\pi}{3}\sin(\pi-\frac{\pi}{4})\hat{i}$$

$$\Rightarrow v_{(t=3\sec)} = -0.1\frac{\pi}{3}\sqrt{2}\hat{i} \quad \boxed{\therefore v(_{t=3\sec)} = 0.074\hat{i}\,m.\sec^{-1}}$$

تسارع (تعجيل) الجسم :

$$a = -A.w^2.\cos(wt+\phi)\hat{i}...(6-5)$$

$$a_{(t=3\sec)} = -0.1(\frac{\pi}{3})^2\cos(\frac{\pi}{3}.3-\frac{\pi}{4})\hat{i}$$

$$\Rightarrow a_{(t=3\sec)} = -\frac{0.1}{\sqrt{2}}\hat{i}(-\frac{\pi^2}{9}) \quad \boxed{\therefore a_{(t=3\sec)} = 0.696\hat{i}\,m.s^{-2}}$$

7 - القيمة العظمى للسرعة والتسارع (التعجيل) :

القيمة العظمى للسرعة :

$$v_m = \pm Aw_i...(5-5)$$

$$v_m = \pm(0.1).(\frac{\pi}{3})\hat{i}$$

$$\boxed{v_m = \pm 0.105\hat{i}\,m.s^{-1}}$$

القيمة العظمى للتسارع (التعجيل) :

$$a_m = \pm A.w^2 i...(7-5)$$

$$a_m = \pm(0.1).(\frac{\pi}{3})^2\hat{i}$$

$$a_m = \pm(0.1).(\frac{\pi^2}{9})\hat{i} \quad \boxed{\Rightarrow a_m = \pm 0.110\hat{i}\,m.s^{-2}}$$

مثـــال : يتحــرّك جســم حركـــة توافقيـــة بســيطة مقــداره ($5Hz$) وكانــت ســرعته ($2im.s^{-2}$) عنــدما كــان موقعه ($-0.5im$) ، أوجد معادلة الحركة لهذا الجسم ؟

الحل :

تعطى معادلة الحركة التوافقية البسيطة كالتالي :

$$x = A\cos(wt + \phi)i ...(1-5)$$

ولإيجاد معادلة الحركة علينا إيجاد قيمة الثوابت (w) و (ϕ) و (A) .

أولا : إيجاد (w)

بما أن :

$$w = 2\pi f = \frac{1}{T} ...(3-5)$$

$$w = (2\pi)(5) \boxed{\Rightarrow w = 10\pi rad.s^{-1}}$$

ثانيا : إيجاد (ϕ) و (A)

بما أن :

$$x_i = -0.5im$$

$$x_i = A\cos\phi i$$

وكذلك :

$$v_i = 2im.\sec^{-2}$$

$$v_i = -Aw\sin\phi i$$

يجب أن تكون كل من $\sin\phi$ و $\cos\phi$ سالبتين حتى تصبح المعادلتين أعلاه صحيحتين من حيث الإتجاه .

إذن يجب أن تقع الزاوية في الربع الثالث .

وبقسمة المعادلتين أعلاه على بعضهما نحصل على قيمة (ϕ) :

$$\tan\phi = \frac{2}{0.5w} = \frac{2}{(0.5)(10\pi)} = \frac{2}{5\pi}$$

$$\boxed{\phi = \pi + 0.127rad}$$

أما قيمة (A) :

$$xi = A\cos\phi i$$

$$-0.5 = A\cos(0.127)$$

$$A = \frac{-0.5}{\cos 0.127} \boxed{\Rightarrow A = 0.5m}$$

وبهذا تصبح معادلة الحركة كما يلي :

$$\boxed{x = 0.5\cos(10\pi t + \pi + 0.127)i}$$