الفصل الأول

المتجهات

1-1 الميكانيك الكلاسيكي :-

هو اساس دراسة فيزياء القوة التي تؤثر على الاجسام وغالبا مايشار الى الميكانيك الكلاسيكي باسم ميكانيك نيوتن نسبة الى اسحاق نيوتن الذي هو من اكتشفه .

يمكن تقسيم الميكانيك الكلاسيكي الفى قسمين :-

أ- القسم الاول

يسمى الاستاتك او السكون والذي يدرس حالة الاجسام المادية الساكنة .

ب- القسم الثاني

يسمى الديناميك او علم التحريك والذي يدرس حالة الاجسام المادية المتحركة والقابلة للسقوط وهي نفسها تنقسم الى قسمين ميكانيك الموائع وميكانيك المواد الصلبة .

1-2 انواع الكميات الفيزيائية

في الفيزياء نوعين من الكميات وهي الكميات العددية (القياسية) والكميات الاتجاهية وسوف نعرف كل كمية على حدا :-

1-1-2 الكميات القياسية (العددية) : تعرف بانها الكميات التي يمكن تحديدها بالمقدار فقط مثل الكتلة والزمن ودرجة الحرارة مثلا يكفي ان نقول درجة حرارة الغرفة هي 25 مئوية وبذلك يكون بمعلومة المقدار يكتمل المعنى المقصود وهكذا بالنسبة للزمن والكتلة وباقي الكميات القياسية .

2-1-2 الكميات المتجهة :- وهي الكميات التي لايمكن تحديدها بذكر مقدارها فقط ولكن يلزم معرفة الاتجاه ايضا فعند الحديث عن السرعة مثلا يجب ذكر المقدار والاتجاه فنقول مقدار سرعة جسم معين تبلغ 100km/h باتجاه الشمال نلاحظ هنا اننا احتجنا لذكر المقار والاتجاه .

1-3 نظام الاحداثيات : من اهم انوع انظمة الاحداثيات هي الاحدا\ثيات الكارتزية والاحداثيات القطبية والاحداثيات الاسطوانية .

1-1-3 الاحداثيات القطبية :- تستخدم لتمثيل المتجهات وذلك لحساب مقدار المحصلة وزاوية ميلها والذي يحدد بالمسافة (نصف القطر r , والزاوية Θ التي يصنعها مع المحور الافقي .

تتكون الصيغة القطبية من الاحداثيات r,Θ .

ملاحظة مهمة : عندما نسمع كلمة درجة (°) فهذا يعني انها الصيغة القطبية .

2-1-3 الاحداثيات الكارتزية :-تستخدم في الميكانيك البسيط لتحديد مقدار الميل المحصلة وزاوية ميلها .

العلاقة بين الاحداثيات الكارتزية والاحداثيات القطبية

العلاقة بينهما هي sin , cos

$Y= r\sin \Theta$

$X= r \cos \Theta$

وبتربيع المعادلتين نحصل على

$r = x^2 + y^2$

$\tan \Theta = y / x$

مثال 1 / حول من الصيغة القطبية الى الصيغة الكارتزية المتجه الأتي

B(3,0)

الحل / $r= 3 \quad , \Theta=0$

$X= r \cos \Theta = 3 \cos 0 = 3\times 1 = 3$

$Y= r \sin \Theta = 3 \sin 0 = 3\times 0 = 0$

الصيغة الكارتزية هي $(X,Y) = (3,0)$

مثال 2 / حول الصيغة الكارتيزية الى الصيغة القطبية للمتجه E(-6,6)

$X=-6 \quad , Y=6$

$r = X^2 + Y^2 = 36 + 36 = 72$

$Y + r \sin \Theta \quad 6 + 72 \sin \Theta$

$\sin\Theta = 6 / 72 = 6 / (36 \times 2)$

$\sin \Theta = 6 / 6 \times 2 = 1 / 2$

$X = r \cos \Theta \qquad -6 = 72 \cos \Theta$

$\cos \Theta = -6 / 72 = -6 / (36 \times 2)$

$\cos \Theta = -6 / 6 \times 2 = -1 / 2$

$\Theta = 45$

الصيغة القطبية $(72 , 45^\circ)$

2-1 المتجهات (Vectors)

1-2-1 متجه الوحدة (Unit Vector)

يُعرّف متجه الوحدة ($\hat{u}_{\vec{A}}$) في إتجاه المتجه ($\vec{A}$) كالتالي :-

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \ldots.(1-1)}$$

حيث أن :-

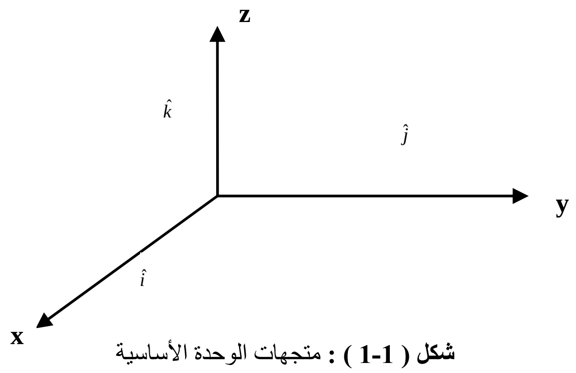
$\hat{u}_{\vec{A}}$:- متجه الوحدة في إتجاه المتجه ($\vec{A}$) .

$\vec{A}$:- المتجه ($\vec{A}$) .

$|\vec{A}|$:- مقدار المتجه ($\vec{A}$) .

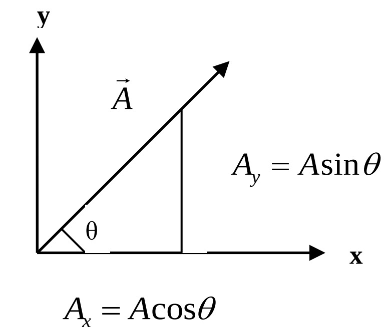
2-2-1 متجهات الوحدة الأساسية ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) (Basic Unit Vectors)

وهي متجهات مقدارها الوحدة وتعمل في الإتجاهات الموجبة للمحاور (x, y, z) على الترتيب كما في الشكل (1-1) وعليه فإن هذه المتجهات الثلاثة تكون متعامدة .



شكل (1-1) : متجهات الوحدة الأساسية

والآن لإيجاد مقدار المتجه في حالة المتجه ذات بعدين كما في الشكل (2-1) .



شكل (2-1) : متجه ذات بعدين

من الشكل (2-1) يتضح لنا أن :-

$$\boxed{|\vec{A}| = \vec{A} = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} \;...(2-1)}$$

حيث أن :-

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta$$

θ :- هي الزاوية التي تعملها المحصلة مع محور (x) الموجب ، وتُحسب من المعادلة الآتية :

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \;...(3-1)}$$

والآن يُمكن تعميم ذلك على المتجه في الفضاء (ذات ثلاثة أبعاد) كالتالي :-

$$\boxed{\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}} ...(4-1)}$$

مثال :- إذا كان $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

1- إحسب مقدار المتجه ($\vec{A}$) ؟

2- ما هو متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{A}$) ؟

الحل :-

1 - من المعادلة (2-1) :

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}} ...(2-1)$$

حيث أن :

$$A_x = 3$$

$$A_y = 4$$

إذن :

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{9+16}$$

مقدار المتجه ($\vec{A}$) $\boxed{\left|\vec{A}\right| = 5 \text{ units}}$

2 - من المعادلة (1-1) :

$$\hat{u}_{\vec{A}} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} ....(1-1)$$

$$\hat{u}_{\vec{A}} = \frac{1}{5}(3\hat{i} + 4\hat{j})$$

$$\hat{u}_{\vec{A}} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{A}$) $\boxed{\hat{u}_{\vec{A}} = 0.6\hat{i} + 0.8\hat{j}}$

3-2-1 جمع وطرح المتجهات (Addition and Subtraction of Vectors)

يمكن جمع أو طرح المتجهات بإحدى الطريقتين :-

1-3-2-1 طريقة الرسم (Graphical Method)

في هذه الطريقة نرسم المتجه الأول بمقياس رسم مناسب ، ومن نهاية المتجـه الأول نرسـم المتجـه الثـاني وبـنفس مقياس الرسم ، وهكذا نكرّر ذلك بالنسبة لبقية المتجهات .

إن محصلة (Resultant) هذه المتجهات يُمثلها مقداراً وإتجاهاً المتجه الواصل مـن نقطـة البدايـة للمتجـه الأول إلى نقطة النهاية للمتجه الأخير .

2-3-2-1الطريقة التحليلية (Analytic Method)

بالرجوع إلى الشكل (1-1) نجد أن المتجه ($\vec{A}$) ذات بعدين يمكن كتابته بدلالة مركباته كالآتي :-

$$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} ...(5-1a)}$$

وبتعميم ذلك على المتجه في الفضاء (ذات ثلاثة أبعاد) فإن المتجه ($\vec{A}$) يمكن كتابته على الشكل التالي :-

$$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} ...(5-1b)}$$

وبالمثل بالنسبة للمتجه ($\vec{B}$) :-

$$\boxed{\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} ...(6-1)}$$

بالتالي ومن المعادلتين (5-1b) و (6-1) يمكن كتابة معادلة جمع المتجهين ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) وكالآتي :

$$\boxed{\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} ...(7-1)}$$

أما معادلة طرح المتجهين ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) فتكون كالآتي :

$$\boxed{\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} ...(8-1)}$$

يتّضح من هذه الطريقة (التحليلية) إنه قبل إجراء عملية جمع أو طرح المتجهات يجب إتباع ما يلي :-

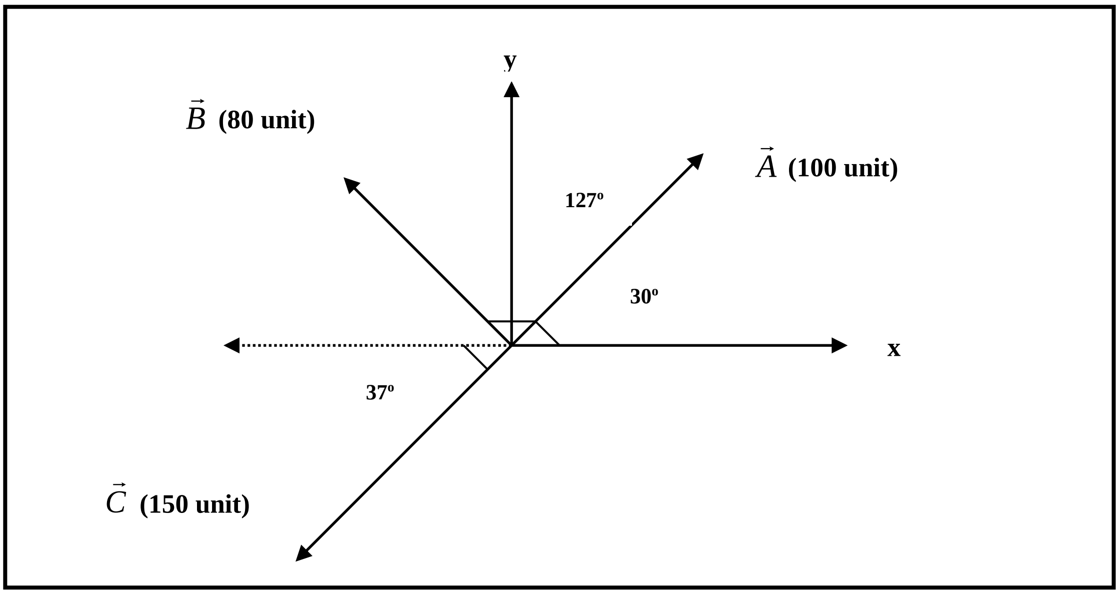
1- كتابة كل متجه بدلالة مركباته .

2- جمع أو طرح المُركبات المُتقابلة للمتجه.

مثال :- من الشكل الآتي ، إحسب مقدار المتجه ($\vec{R}$) والزاوية التـي يعملهـا مـع محـور (x) الموجـب فـي كـل من الحالتين الآتيتين وبإستخدام طريقة التحليل :-

1- $\vec{R}1 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

2- $\vec{R}2 = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$



الحل :-

أولا : نكتب المتجهات $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ بدلالة مُركباتها .

بالنسبة للمتجه ($\vec{A}$) :

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{A} = 100\cos30\hat{i} + 100\sin30\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{A} = 86.6\hat{i} + 50\hat{j}}$$

بالنسبة للمتجه ($\vec{B}$) :

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\vec{B} = 80\cos127\hat{i} + 80\sin127\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{B} = -48\hat{i} + 64\hat{j}}$$

بالنسبة للمتجه ($\vec{C}$) :

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$$

$$\vec{C} = (-150\cos37\hat{i}) + (-150\sin37\hat{j})$$

$$\boxed{\vec{C} = -120\hat{i} - 90\hat{j}}$$

ثانيا : نجمع أو نطرح المُركبات المُتقابلة للمتجه .

1 - بالنسبة للحالة الأولى : $\vec{R}1 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

من خلال تطبيق المعادلة (7-1) ولثلاثة متجهات ينتج :

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(A_x+B_x+C_x)\hat{i}+(A_y+B_y+C_y)\hat{j}+(A_z+B_z+C_z)\hat{k}$$

$$\vec{R}1=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(86.6+(-48)+(-120))\hat{i}+(50+64+(-90))\hat{j}+(0+0+0)\hat{k}$$

$$\vec{R}1=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

$$\boxed{\therefore\ \vec{R}1=-81.4\hat{i}+24\hat{j}}$$

من المعادلة (1-2) نحسب مقدار ($\vec{R}1$) :

$$\left|\vec{A}\right|=\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2}\ ...(2-1)$$

$$\left|\vec{R}1\right|=\sqrt{(-81.4)^2+(24)^2}$$

مقدار المتجه ($\vec{R}1$) $\boxed{\left|\vec{R}1\right|=84.8\ \text{units}}$

من المعادلة (1-3) نحسب (θ) وهي الزاوية التي تعملها المحصلة ($\vec{R}1$) مع محور (x) الموجب :

$$\theta=\tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}\ ...(3-1)$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{24}{-81.4}$$

الزاوية التي تعملها المحصلة ($\vec{R}1$) مع محور (x) الموجب $\boxed{\theta=163.6^{\circ}}$

2 - بالنسبة للحالة الثانية : $\vec{R}2=\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}$

من خلال تطبيق المعادلة (1-8) ولثلاثة متجهات ينتج :

$$\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}=(A_x-B_x+C_x)\hat{i}+(A_y-B_y+C_y)\hat{j}+(A_z-B_z+C_z)\hat{k}$$

$$\vec{R}2=\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}=(86.6-(-48)+(-120))\hat{i}+(50-64+(-90))\hat{j}+(0+0+0)\hat{k}$$

$$\vec{R}2=\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}$$

$$\therefore\ \vec{R}2=14.6\hat{i}-104\hat{j}$$

من المعادلة (1-2) نحسب مقدار ($\vec{R}2$) :

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2} \ldots (2-1)$$

$$\left|\vec{R}2\right| = \sqrt{(14.6)^2 + (-104)^2}$$

$\boxed{\left|\vec{R}2\right| = 105 \text{ units}}$ ($\vec{R}2$) مقدار المتجه

من المعادلة (3-1) نحسب (θ) وهي الزاوية التي تعملها المحصلة ($\vec{R}2$) مع محور (x) الموجب :

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} \ldots (3-1)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-104}{14.6}$$

الزاوية التي تعملها المحصلة ($\vec{R}2$) مع محور (x) الموجب $\boxed{\theta = 278^\circ}$

4-2-1 تساوي المتجهات (Equality of Vectors)

إذا كان :

$$\vec{A} = \vec{B}$$

فإن :

$$\vec{A} - \vec{B} = 0$$

أي أن :

$$(A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} = 0$$

أي أن :

$$A_x - B_x = 0$$
$$A_y - B_y = 0$$
$$A_z - B_z = 0$$

وبذلك فإن :

$$A_x = B_x$$
$$A_y = B_y$$
$$A_z = B_z$$

مما سبق نستنتج بأنه يُمكن أن يتساوى المتجهان إذا كانت مُركباتهما المتقابلة متساوية .

مثال : أوجد قيم كل من x , y , z والتي تجعل المتجهين الآتيين متساويين :

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3z\hat{k}$$

$$\vec{B} = (x-3)^2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$$

الحل :-

بما أنه المطلوب أن يتساوى المتجهان أي أن :

$$\vec{A} = \vec{B}$$

وأن :

$$\hat{i} + 2\hat{j} + 3z\hat{k} = (x-3)^2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$$

وبالتالي يتساوى المركبات المتقابلة للمتجهين :

$$1 = (x-3)^2$$

$$2 = y$$

$$3z = 1$$

وعليه فإن :

$$\boxed{x = 4}$$

$$\boxed{y = 2}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{3}}$$

5-2-1 ضرب المتجهات (Multiplication of Vectors)

يُوجد هُناك نوعان من ضرب المتجهات وهما : -

1-5-2-1 الضرب القياسي للمتجهات (Dot or Scalar product of Vectors)

يعرّف الضرب القياسي كالتالي :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta ...(9-1)}$$

حيث أن :-

$|A|$: مقدار المتجه $\vec{A}$.

$|B|$: مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ : الزاوية الصغرى بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أو إمتدادهما وتُحسب من العلاقة الآتية :

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} ...(10-1)}$$

لإيجاد الضرب القياسي $\vec{A}.\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نُعوض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x \hat{i}.\hat{i} + A_x B_y \hat{i}.\hat{j} + A_x B_z \hat{i}.\hat{k} + A_y B_x \hat{j}.\hat{i} + A_y B_y \hat{j}.\hat{j} + A_y B_z \hat{j}.\hat{k} + A_z B_x \hat{k}.\hat{i} + A_z B_y \hat{k}.\hat{j} + A_z B_z \hat{k}.\hat{k} ...(11-1)}$$

وبتطبيق تعريف الضرب القياسي على متجهات الوحدة الأساسية نجد أن :

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

بينما

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = 0$$

وعليه فإن المعادلة (1- 11) تأخذ الصيغة التالية :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ...(12-1)}$$

ملاحظة :- يتضح لنا بأنه في حالة الضرب القياسي :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}}$$

مثال : إذا كان :

$$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{k}$$

إحسب : -

1- الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

2- الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب ؟

الحل :-

1 - بإستخدام المعادلة (1- 10) :

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} ...(10-1)$$

لغرض حساب قيمة الزاوية (θ) بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يجب حساب قيمة كل من ($\vec{A}.\vec{B}$) و ($|A||B|$) وكالآتي :

من المعادلة (1 – 12) :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ...(12-1)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (1)(3) + (2)(0) + (-2)(-4)$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = 11}$$

من المعادلة (1- 4) بالنسبة للمتجه $\vec{A}$:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}$$

$$\boxed{\left|\vec{A}\right| = 3units}$$

أما بالنسبة للمتجه $\vec{B}$:

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-4)^2}$$

$$\boxed{\left|\vec{B}\right| = 5units}$$

$$\boxed{\therefore\ \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| = 15units}$$

وبتعويض القيم الناتجة أعلاه في المعادلة (1 – 10) نحصل على :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{11}{15}$$

قيمة الزاوية بين المتجهين $\boxed{\theta = 42.8^\circ}$

2 - لإيجاد الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب ، فإننا بحاجة إلى متجهين أحدهما $\vec{A}$ والآخر في إتجاه (x) الموجب حتى نتمكن من تطبيق المعادلة (1 – 10) ، وليكن ($\hat{i}$) .

وعليه فإن المعادلة (1 – 9) تصبح :

$$\vec{A}.\hat{i} = |A|.\left|\hat{i}\right|\cos\theta$$

إذن :

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\hat{i}}{|A|.\left|\hat{i}\right|}$$

من المعادلة (1 – 12) :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ...(12-1)$$

$$\vec{A}.i = (1)(1) + (2)(0) + (-2)(0)$$

$$\boxed{\vec{A}.\hat{i} = 1}$$

من الفرع الأول $\boxed{\left|\vec{A}\right| = 3}$:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

قيمة الزاوية بين المتجه $\vec{A}$ ومحور (x) الموجب $\boxed{\theta = 70.5^{\circ}}$

1-2-5-2 الضرب الإتجاهي للمتجهات (Cross or Vector product of Vectors)

يُعرّف الضرب الإتجاهي كالتالي :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = |A||B|\sin\theta ...(13-1)}$$

حيث أن :-

$|A|$: مقدار المتجه $\vec{A}$.

$|B|$: مقدار المتجه $\vec{B}$.

θ : الزاوية الصغرى بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ أو إمتدادهما .

لإيجاد الضرب الإتجاهي $\vec{A}x\vec{B}$ بدلالة مركباتهما فإننا نعوّض عن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما يلي :

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})x(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = A_xB_x\hat{i}x\hat{i} + A_xB_y\hat{i}x\hat{j} + A_xB_z\hat{i}x\hat{k} + A_yB_x\hat{j}x\hat{i} + A_yB_y\hat{j}x\hat{j} + A_yB_z\hat{j}x\hat{k} + A_zB_x\hat{k}x\hat{i} + A_zB_y\hat{k}x\hat{j} + A_zB_z\hat{k}x\hat{k} ...(14-1)}$$

وبتطبيق تعريف الضرب التقاطعي (مع الإتجاه) على متجهات الوحدة الأساسية نجد أن :

$$\hat{i}x\hat{i} = \hat{j}x\hat{j} = \hat{k}x\hat{k} = 0$$

بينما

$$\hat{i}x\hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j}x\hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k}x\hat{i} = \hat{j}$$

و

$$\hat{i}x\hat{k} = -\hat{j} \qquad \hat{k}x\hat{j} = -\hat{i} \qquad \hat{j}x\hat{i} = -\hat{k}$$

وعليه فإن المعادلة (1- 14) تأخذ الصيغة التالية :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} ...(15-1)}$$

ملاحظة :- يتضح لنا بأنه في حالة الضرب الإتجاهي :

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}}$$

مثال : إذا كان :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

إحسب كل من :-

1 - $2\vec{A} - 3\vec{B}$ ؟

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 2(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - 3(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$2\vec{A} - 3\vec{B} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} - 3\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\boxed{2\vec{A} - 3\vec{B} = \hat{i} + 12\hat{j} - 4\hat{k}}$$

2 - مقدار $\vec{A}$ ومقدار $\vec{B}$ ؟

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2}$$

$$\boxed{\therefore \left|\vec{A}\right| = \sqrt{14} units}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$$

$$\boxed{\therefore \left|\vec{B}\right| = 3units}$$

3 - الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|}...(10-1)$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{|A||B|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(2)(1)+(3)(-2)+(1)(2)}{3\sqrt{14}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-2}{3\sqrt{14}}$$

$$\boxed{\therefore \theta = 100.3^{\circ}}$$

4 - $\vec{A}x\vec{B}$ ؟

$$\vec{A}x\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}...(15-1)$$

$$\vec{A}x\vec{B} = \left[(3)(2)-(1)(-2)\right]\hat{i} + \left[(1)(1)-(2)(2)\right]\hat{j} + \left[(2)(-2)-(3)(1)\right]\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{A}x\vec{B} = 8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}$$

5 - متجه الوحدة في الإتجاه $\vec{A}x\vec{B}$ ؟

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{\vec{A}x\vec{B}}{\left|\vec{A}x\vec{B}\right|}$$

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(8)^2 + (-3)^2 + (-7)^2}}$$

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = \frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{122}}}$$

6 - متجه الوحدة في الإتجاه $\vec{B}x\vec{A}$ ؟

$$\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$$

$$\hat{u}_{\vec{A}x\vec{B}} = -\hat{u}_{\vec{B}x\vec{A}}$$

$$\boxed{\hat{u}_{\vec{B}x\vec{A}} = -\frac{8\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{122}}}$$

مثال :- إحسب قيمة (x) التي تجعل المتجهيين التاليين متعامدين :

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + x\hat{k}$$

$$\vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

الحل :-

بما أن المطلوب أن يكون المتجهان متعامدين فالزاوية بينهما تساوي ($90^\circ = \frac{\pi}{2}$) .

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta ...(9-1)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$

$$(2)(-1) + (3)(-2) + 2x = 0$$

$$2x = 8$$

قيمة (x) التي تجعل المتجهيين متعامدين $\boxed{\therefore x = 4}$

مسائل الفصل الأول
المتجهات (Vectors)
((1))

س1 : إذا كان :

$$\vec{C}=4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{B}=-2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{A}=5\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$$

1- إحسب مقدار كل من المتجهات ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) و ($\vec{C}$) ؟

2- إحسب مقدار $3\vec{A}-2\vec{B}$ ؟

الإجابة: $\boxed{|\vec{A}|=\sqrt{77}units}$ $\boxed{|\vec{B}|=\sqrt{17}units}$ $\boxed{|\vec{C}|=\sqrt{29}units}$ $\boxed{3\vec{A}-2\vec{B}=11\hat{i}-8\hat{j}-24\hat{k}}$

س2 : إذا كانت مركبات المتجهين ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) هي :

$$A_x=3\ , A_y=1.5\quad B_x=0.5\ , B_y=2$$

إحسب الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

الإجابة : $\boxed{\theta=49.45^\circ}$

س3 : إذا كان :

$$\vec{B}=9\hat{i}+20\hat{j}+12\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$$

1- ما هو متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{A}$) ؟

2- ما هو متجه الوحدة في إتجاه ($\vec{B}$) ؟

الإجابة : $\boxed{\hat{u}_{\vec{A}}=0.6\hat{i}-0.3\hat{j}+0.6\hat{k}}$ $\boxed{\hat{u}_{\vec{B}}=0.36\hat{i}-0.8\hat{j}+0.48\hat{k}}$

س4 : إذا كان :

$$\vec{B}=4\hat{i}+x\hat{j} \quad \text{و} \quad \vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}$$

أوجد قيمة (x) والتي تجعل المتجهين متعامدين مع بعضهما البعض ؟

الإجابة : $\boxed{x=8}$

س5 : إذا كان :

$$\vec{B}=\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k} \quad \text{و} \quad \vec{A}=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

إحسب المتجه ($\vec{C}$) بحيث أن $\vec{A}-\vec{B}+C=0$ ؟

الإجابة : $\boxed{\vec{C}=-2\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}}$
