

جامعة تكريت
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الفيزياء الرياضية
حل التمارين
1

استاذ دكتورة
عواطف صابر جاسم

المقرر الأول

المحدد: هي مجموعة العناصر المرتبة في صفوف وأعمدة بحيث يكون عدد الصفوف مساوياً إلى عدد الأعمدة والمحصورة داخل خطين مستقيمين ويرمز لها بالرمز Δ أو D .

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

إذا كانت المحددة من الدرجة $|X|$ فإن $\Delta = a_{11}$

مثال ذلك $\Delta = |2| = 2$

وإذا كانت المحددة من الدرجة 2×2 فإن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال: أوجد قيمة المحدد الآتي:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = (5)(2) - (4)(-1) = 10 + 4 = 14$$

أما إذا كانت المحددة من الدرجة 3×3 فإن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

نلاحظ أنه يمكن الحصول على كل محدد X باستبعاد الصف والعمود الذي يقع فيه العنصر مع مراعاة وضع الإشارة المناسبة.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثال ٥- أوجد قيمة المحددة : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

الحل :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0 - 12) - 3(-8 - 14) + 4(-6 - 0)$$

$$= 2(-12) - 3(-22) + 4(-6)$$

$$= -14 + 66 - 24 = +18$$

مثال ٦- أوجد قيمة المحددة الآتية باستخدام الصف الثالث :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 1(1 - 0) = 1$$

مثال ٧- أوجد قيمة المحدد الآتية باستخدام العمود الأول :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

الحل :-

نطرح الصف الثالث من الصفين الأول والثاني :-

$$\begin{vmatrix} (1-1) & (2-4) & (4-16) \\ (1-1) & (3-4) & (9-16) \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -12 \\ 0 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

الآن نضع المحددة وفق العمود الأول (المتوى على عنصرين صفيين) :-

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & -12 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^4 (14 - 12)$$

$$= (1)(2) = 2$$

مثال ٥- أوجد قيمة المحددة الآتية: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

الحل: - جمع العمود الأول مع العمود الثاني ثم نجمع العمود الثالث إلى العمود الثاني:

$$= \begin{vmatrix} 2 & (2+1) & -3 \\ 1 & (1+3) & -4 \\ -1 & (-1+1) & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & (3+(-3)) & -3 \\ 1 & (4+(-4)) & -4 \\ -1 & (0+6) & 6 \end{vmatrix}$$

الآن نضع المحدد باستخدام العمود الثاني: -

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

$$= (-1)^{3+2} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = (-1)^5 \cdot 6(-8+3) = -6(-5) = 30$$

خواص المحددات

أولاً: - المحددة لا تتغير قيمتها بتغيير الصفوف إلى أعمدة أو الأعمدة إلى صفوف: -
مثال ٦:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 8 - 2 = 6$$

فإذا استبدل الصفان بالعمودين نجد:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 8 - 2 = 6$$

مثال ٧:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= 1(2-2) - 0(0-8) + 2(0-4) = 0 - 0 + 2(-4) = -8$$

فإذا استبدلت الصفوف بالأعمدة نجد:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= 1(2-2) - 0(0-2) + 4(0-2) = 0 - 0 + 4(-2) = -8$$

ثانياً - إذا تساوى عمودان أو صفان فقيمة المحددة تساوي صفراً

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 4 - 4 = 0$$

مثال ١ -

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

مثال ٢ -

$$= 2(1 - 12) - 3(3 - 3) + 2(12 - 1)$$

$$= 2(-11) - 3(0) + 2(11) = -22 + 22 = 0$$

ثالثاً - إذا تبديل عمودان أو صفان موافقهما ، تبقى قيمة المحددة كما هي مع مراعاة

تغيير الإشارات فقط .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

مثال ٣ -

$$= 1(18 - 0) - 0(6 - 0) + 4(4 - 6)$$

$$= 1(18) - 0(6) + 4(-2)$$

$$= 18 - 0 - 8 = 10$$

وعندما نغير موقع العمود الأول ونضعه محل العمود الثاني - مع تغيير موقع العمود الثاني

محل العمود الأول - مع تغيير الإشارات نجد :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{3 \times 3}$$

$$= -(0) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 4 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= -(0)(6 - 0) + 1(18 - 0) - 4(6 - 4)$$

$$= -(0)(6) + 1(18) - 4(2) = 0 + 18 - 8 = 10$$

رابعاً : إذا ضرب أحد الصفوف أو الأعمدة بمقدار ثابت ، فهذا يعني ان قيمة المحددة تكون

مضروبة في ذلك المقدار .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مثال ٤ -

$$5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 15 & -5 & 10 \\ 5 & 20 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

مثال ٥ -

خامساً: إذا كتب كل عنصر لصف او عمود معين بمجموعة عددين او اكثر فالمحددة يمكن ان تكتب بمجموعة عددين او اكثر.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2+4 & 5 & 4 \\ 3+1 & -2 & 3 \\ 1+0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{مثال ١-}$$

سادساً: إذا اضيف الى عناصر صف او عمود معين بعد ضربها بعدد ثابت مثل m الى العناصر المناظرة لصف (عمود) اخر، فإن المحددة لا تتغير.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{مثال ١-}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{مثال ٢-}$$

$$= 1(2-0) - 2(4-5) + 3(0-10)$$

$$= 1(2) - 2(-1) + 3(-10)$$

$$= 2 + 2 - 30 = -26$$

وإذا اضيف للعمود الاول العناصر المناظرة للعمود الثاني مع الضرب في العدد 2 نجد:

$$\begin{vmatrix} 1+(2)(2) & 2 & 3 \\ 4+(2)(2) & 2 & 1 \\ 5+(0)(2) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{مثال ٢-}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5(2-0) - 2(8-5) + 3(0-10)$$

$$= 10 - 2(3) + 3(-10) = 10 - 6 - 30 = -26$$

سابعاً: إذا كانت كل العناصر التي فوق القطر الرئيسي او التي لته مساوية للصفر فإن قيمة المحددة هي حاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسي.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{مثال ١-}$$

ثانياً: إذا كانت كل عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة مساوية للصفر، فإن قيمة المحددة

صفرًا. مثالاً:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 1(0-0) - 2(0-0) + 3(0-0) = 0$$

مثالاً:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + (0) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 1(0-0) - 2(0-0) + 0(6-8) = 0$$

ثالثاً: إذا كان صفان أو عمودان من المحددة متطابقان، فإن المحددة تساوي صفرًا.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 1(3-4) - 2(1-1) + 1(4-3) = -1 - 0 + 1 = 0$$

المحددات والمعادلات الخطية

أولاً: معادلات من الدرجة الثانية

مثالاً: حل المعادلات الآتيتين:

$$2x - 3y = 8$$

$$3x + y = 1$$

الحل: - نسبة أولاً المحددة D =

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 2 + 9 = 11$$

وبما أن $D \neq 0$ ، فإن يوجد للحجمية حل وحيد هو:

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 8 - (-3) = 8 + 3 = 11$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 2 - 24 = -22$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{11}{11} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-22}{11} = -2$$

$$3x + y = 1$$

$$3(1) + (-2) = 1$$

$$3 - 2 = 1$$

$$1 = 1$$

ويمكن التحقق من قيم x و y في المعادلتين الآتيتين:

$$3x + 5y = 8$$

$$4x - 2y = 1$$

مثال: حل المعادلتين الآتيتين!

الحل :-

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = -6 - 20 = -26$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = -16 - 5 = -21$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 3 - 32 = -29$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-21}{-26} = +\frac{21}{26}$$

$$y = \frac{-29}{-26} = +\frac{29}{26}$$

ويمكن التحقق من قيم x و y في المعادلتين الآتيتين:

$$3x + 5y = 8$$

$$3\left(\frac{21}{26}\right) + 5\left(\frac{29}{26}\right) = 8$$

$$\frac{63}{26} + \frac{145}{26} = 8$$

$$\frac{208}{26} = 8$$

$$8 = 8$$

فمن معادله نفحص
قيمة $x = \frac{21}{26}$ و $y = \frac{29}{26}$

ثانياً: حددان من الدرجة الثالثة

$$2x + 3y - z = 1$$

$$3x + 5y - 2z = 8$$

$$x - 2y - 3z = -1$$

مثال: حل مجموعة المعادلات الآتية:

الحل :- حسب اوجه المحددة D

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-15 - 4) - 3(-9 - (-2)) - 1(-6 - 5)$$

$$= 2(-19) - 3(-9 + 2) - 1(-11)$$

$$= -38 + 21 + 11 = -6$$

← تكملة مع

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 1 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 3 \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + (-1) \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= 1(-15 - 4) - 3(-24 - 2) - 1(-16 - (-5))$$

$$= -19 - 3(-26) - 1(-16 + 5)$$

$$= -19 + 78 + 11 = 70$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{70}{-6}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 2 \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= 2(-24 - 2) - 1(-9 - (-2)) - 1(-3 - 8)$$

$$= 2(-26) - 1(-9 + 2) - 1(-11)$$

$$= -52 + 7 + 11 = -34$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-34}{-6} = \frac{34}{6}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= 2(-5 - (-16)) - 3(-3 - 8) + (-6 - 5)$$

$$= 2(-5 + 16) - 3(-11) + (-11)$$

$$= 2(11) + 33 - 11 = 44$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{44}{-6}$$

ويمكن التحقق من قيم x, y, z في المعادلتين الأولىين:

نعوض في المعادلة (1) قيم $x = \frac{70}{-6}, y = \frac{34}{6}, z = \frac{44}{-6}$

$$2x + 3y - z = 1$$

$$2\left(\frac{70}{-6}\right) + 3\left(\frac{34}{6}\right) - \left(\frac{-44}{6}\right) = 1$$

$$-\frac{140}{6} + \frac{102}{6} + \frac{44}{6} = 1$$

$$\frac{6}{6} = 1$$

$$1 = 1$$